МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Методическая разработка по математическому анализу

Включая теорию функций комплексного переменного

II курс
3, 4 семестры

Методическое пособие

Второе издание,
исправленное и дополненное

МАКС ПРЕСС

МОСКВА – 2017

УДК 517(075.8)
ББК 22.161я73
М54

Печатается по решению Редакционно-издательского совета факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова

Составители:
А.В. Домрина, Т.А. Леонтьева, И.С. Ломов

М54 **Методическая разработка по математическому анализу (включая теорию функций комплексного переменного): II курс; 3, 4 семестр:** Методическое пособие / Сост.: Домрина А.В., Леонтьева Т.А., Ломов И.С. – М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ имени М.В. Ломоносова (лицензия ИД N 05899 от 24.09.2001 г.); МАКС Пресс, 2017. – 2-е изд., испр. и доп. – 44 с.
ISBN 978-5-89407-574-7
ISBN 978-5-317-05554-7

Настоящее методическое пособие содержит примерный план семинарских занятий по курсу математического анализа, читаемого в 3 и 4 семестрах студентам 2 курса факультета Вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М.В. Ломоносова, обучающимся по специальности 010200 «Прикладная математика и информатика». Пособие также содержит программу курса математического анализа, включающего в себя курс теории функций комплексного переменного, список рекомендованной литературы, списки вопросов к коллоквиумам и к экзаменам, примерные варианты контрольных работ, варианты зачётных комиссий, а также дополнительные задачи для подготовки к контрольным работам, к коллоквиумам и к экзаменам.

Пособие предназначено для преподавателей и студентов 2 курса факультета ВМК.

УДК 517(075.8)
ББК 22.161я73

Издательский отдел
Факультета вычислительной математики и кибернетики
МГУ имени М.В. Ломоносова
Лицензия ИД N 05899 от 24.09.01 г.

119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы,
МГУ имени М.В. Ломоносова, 2-й учебный корпус

Отпечатано с готового оригинал-макета
Подписано в печать 11.05.2017 г.
Формат 60x88 1/16. Усл.печ.л. 2,75. Тираж 200 экз. Заказ 117.

Издательство ООО «МАКС Пресс». Лицензия ИД N 00510 от 01.12.99 г.
119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы,
МГУ имени М.В. Ломоносова, 2-й учебный корпус, 627 к.
Тел. 8(495)939-3890/91. Тел./Факс 8(495)939-3893

ISBN 978-5-89407-574-7
ISBN 978-5-317-05554-7

СОДЕРЖАНИЕ

Программа курса "Математический анализ"

3 семестр

В 3 семестре по данному курсу каждую неделю читаются две лекции и проводятся два семинарских занятия.

Числовые ряды. Критерий Коши сходимости рядов. Ряды с неотрицательными членами. Критерий сходимости, признаки сравнения. Признаки сходимости Коши, Даламбера, Раабе, Гаусса, Коши-Маклорена. Абсолютная и условная сходимости. Признаки сходимости Лейбница, Абеля и Дирихле. Свойства сходящихся рядов. Бесконечные произведения. Двойные и повторные ряды. Понятие об обобщенных методах суммирования расходящихся числовых рядов. Методы Чезаро (средних арифметических) и Пуассона-Абеля.

Функциональные последовательности и ряды. Поточечная сходимость. Равномерная сходимость на множестве. Критерий Коши равномерной сходимости. Признаки равномерной сходимости Вейерштрасса, Абеля, Дирихле-Абеля, Дини. Теоремы о непрерывности предельной функции и суммы ряда, о почленном интегрировании и дифференцировании. Сходимость в среднем. Равностепенная непрерывность семейства функций. Теорема Арцела. Степенные ряды и их свойства. Разложение функций в степенные ряды.

Интегрирование функций нескольких переменных. Двойные, тройные и n-кратные интегралы Римана. Критерий интегрируемости функции и классы интегрируемых функций. Свойства интеграла Римана. Сведение кратных интегралов к повторным. Замена переменных. Вычисление объемов с помощью двойных и тройных интегралов. Примеры физических приложений кратных интегралов.

Кратные несобственные интегралы. Теорема об эквивалентности сходимости и абсолютной сходимости. Главное значение несобственного интеграла.

Криволинейные интегралы. Криволинейные интегралы первого и второго рода, их свойства и приложения.

Поверхностные интегралы. Понятие о поверхности в трехмерном пространстве и способы ее задания. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Площадь поверхности. Поверхностные интегралы первого и второго

рода, их свойства и приложения.

Теория поля. Интегральные формулы анализа. Основные операции теории поля и их представление в декартовых и криволинейных координатах. Формулы Грина, Стокса, Остроградского-Гаусса и их приложения. Условия независимости криволинейного интеграла 2-го рода от пути интегрирования.

4 семестр.

В 4 семестре каждую неделю читается одна лекция и проводится один семинар по математическому анализу и одна лекция и один семинар по теории функций комплексного переменного. В учебном плане курс называется "Действительный и комплексный анализ".

Интегралы, зависящие от параметра. Собственные интегралы, зависящие от параметра. Непрерывность, интегрирование и дифференцирование по параметру. Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Равномерная сходимость и ее признаки. Свойства равномерно сходящихся несобственных интегралов, интегрирование и дифференцирование несобственных интегралов по параметру. Вычисление интеграла Дирихле. Гамма-функция и бета-функция Эйлера, их основные свойства. Формула Стирлинга.

Ряды Фурье. Ортонормированные системы в евклидовых и почти евклидовых пространствах. Ряды Фурье по ортонормированным системам. Неравенство Бесселя. Замкнутые и полные ортонормированные системы. Равенство Парсеваля. Сходимость по норме.

Тригонометрические ряды Фурье. Теоремы Фейера о сходимости средних Чезаро частичных сумм тригонометрического ряда Фурье. Тригонометрическая система и ее замкнутость. Теоремы Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывных функций многочленами. Условия почленного интегрирования, равномерной сходимости, сходимости в точке и почленного дифференцирования тригонометрических рядов. Принцип локализации Римана. Тригонометрические ряды Фурье в комплексной форме.

Интеграл Фурье. Преобразование Фурье и его свойства. Интеграл Фурье, обратное преобразование Фурье. Условия разложимости функции в интеграл Фурье.

Теория функций комплексного переменного

Комплексные числа. Расширенная комплексная плоскость (сфера Римана). Топология комплексной плоскости. Сходящиеся последовательности комплексных чисел. Критерий Коши.

Функции комплексного переменного. Предел и непрерывность функции в точке. Простейшие элементарные функции комплексного переменного. Производная функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана. Дифференцирование элементарных функций. Геометрический смысл аргумента и модуля производной функции комплексного переменного. Аналитические и гармонические функции.

Интеграл от функции комплексного переменного. Теорема Коши. Первообразная функции комплексного переменного. Интеграл Коши и интегральная формула Коши. Бесконечная дифференцируемость аналитических и гармонических функций.

Ряды. Ряды комплексных чисел и функций комплексного переменного, в частности, аналитических функций, их свойства. Степенные ряды. Разложение аналитических функций в степенные ряды. Теорема единственности и принцип максимума модуля аналитических функций.

Изолированные особые точки аналитических функций и их классификация. Ряд Лорана, теорема Лорана. Понятие устранимой особой точки, полюса и существенно особой точки. Вычеты и основная теорема о вычетах. Применение теоремы о вычетах к вычислению интегралов. Лемма Жордана. Принцип аргумента. Теорема Руше.

Конформные отображения односвязных областей. Теорема Римана (без доказательства). Принципы конформных отображений. Конформные отображения, осуществляемые элементарными функциями: линейной, дробно-линейной, показательной, логарифмической, степенной, функцией Жуковского.

Задача Дирихле для уравнения Лапласа. Функция Грина (функция источника).

Преобразование Лапласа, его свойства и применения. Понятие об операционном исчислении. Решение дифференциальных уравнений с помощью преобразования Лапласа.

3 семестр

В 3 семестре проводится 28 – 30 семинарских занятий по математическому анализу, включая 2 контрольные работы. Ниже приведены темы занятий и примерные списки задач для решения в аудитории, дома, а также список дополнительных задач. Приведены образцы типичных контрольных работ и контрольной работы на зачётной комиссии. Номера задач для семинарских и домашних занятий даны по задачнику Б.П. Демидовича [3], дополнительных задач по теме "Числовые и функциональные ряды" – по пособию И.А. Виноградовой, С.Н. Олехника и В.А. Садовничего [13], а дополнительных задач по теме "Интегралы" – по курсу Г.М. Фихтенгольца [18], том 3.

Как правило, после изучения числовых и функциональных рядов проводится коллоквиум. Для подготовки к нему можно использовать приводимый ниже примерный список задач (основная их часть взята из [13]) и дополнительные задачи по теме "Числовые и функциональные ряды". Также приведён примерный список вопросов к экзамену и список задач для подготовки к экзамену.

Программа семинарских занятий

Числовые ряды

Занятие 1. Понятие числового ряда. Критерий Коши, необходимое условие сходимости числового ряда. Признаки сравнения для знакопостоянных рядов.

2549, 2554, 2555, 2557, 2558, 2576, 2559, 2570.

Дома : 2552, 2553, 2562, 2567, 2568, 2575, 2577.

Дополн.: гл. I, §6, задачи 15, 18, 20, 29, 31.

Занятие 2. Признаки Даламбера, Коши, Раабе и Гаусса. Интегральный признак Коши.

2581, 2586, 2597, 2598, 2601, 2619, 2629

Дома : 2583, 2589.2, 2597.1, 2599, 2600, 2620, 2642. Доказать признак Жаме (2614.1) и логарифмический признак (2615).

Дополн.: гл. I, §6, задачи 52, 53, 63, 89, 106, 164, 225, 283.

Занятие 3. Знакопеременные ряды. Признак Лейбница. Абсолютная и условная сходимость. Теорема Римана о перестановке членов условно сходящегося ряда.

2701, 2657, 2666, 2666.1, 2659, 2661, 2702, 2680.

Дома: 2678, 2671, 2674, 2703, 2672, 2663, 2704, 2676.

Дополн.: гл. I, §6, задачи 361, 367, 529. §7, задача 42.

Занятие 4. Признаки Абеля, Дирихле. Дальнейшие примеры на абсолютную и условную сходимость.

2698, 2668, 2670, 2673.1, 2682, 2689, 2698.1б).

Дома: 2679, 2680, 2683, 2684, 2686, 2698.1в).

Дополн.: гл. I, §6, задачи 374, 375, 384, 386, 434, 467, 502.

Занятие 5. Бесконечные произведения. Абсолютная и условная сходимость бесконечных произведений.

3061, 3055, 3065, 3068, 3090, 3099.

Дома: 3062, 3056, 3076, 3077, 3091, 3092, 3094.

Дополн.: гл. I, §6, задача 593; гл.I, §7, задача 100; а также Б. П. Демидович [3], задачи 3100, 3101.

Двойные и повторные ряды

Занятие 6. Двойные и повторные ряды.

Рассмотреть примеры:

1. Двойной и оба повторных ряда расходятся. ($a_{mn} = \frac{1}{m+n}$)

2. Двойной и оба повторных ряда сходятся. ($a_{mn} = \frac{1}{m^2n^2}$)

3. Двойной ряд сходится, один повторный ряд сходится, а другой расходится.

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & \dots \\ -1 & -1 & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & \dots \end{array}$$

4. Двойной ряд сходится, а оба повторных ряда расходятся.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 1 & -1 & \dots \\ -1 & 1 & -1 & 1 & \dots \\ 1 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

5. Двойной ряд расходится, а оба повторных ряда сходятся.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

6. Двойной ряд расходится, один повторный ряд сходится, другой расходится.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \dots \\ 1 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

7. Исследовать на сходимость двойной и оба повторных ряда

$$\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 1 & -1 & \dots \\ -1 & 1 & -1 & 1 & \dots \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 & \dots \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 & 1/2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1/n & -1/n & 1/n & -1/n & \dots \\ -1/n & 1/n & -1/n & 1/n & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

Дома:

Исследовать на сходимость двойной и оба повторных ряда

1. $a_{mn} = \frac{(-1)^{m+n}}{mn}$.

2. $a_{mn} = x^m y^n$.

3. $a_{mn} = \frac{1}{(m+n)^\lambda}$.

4. $a_{mn} = \frac{1}{(Am^2+2Bnm+Cn^2)^\lambda}$, $\lambda > 0$, $AC - B^2 > 0, A, C > 0$.

5. S_{mn} – частичные суммы двойного ряда: $S_{mn} = \frac{\sin m}{n} + \frac{\sin n}{m}$, $\quad n, m \in \mathbb{N}$.

6. $S_{mn} = \frac{n-m}{n+m}$, $\quad n, m \in \mathbb{N}$.

Дополн.: гл. I, §6, задачи 1342, 1347.

Функциональные ряды

Занятие 7. Понятие равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов.

2741, 2747, 2748, 2771, 2772.

Дома: 2717, 2742, 2751, 2753, 2773.

Дополн.: гл. I, §7, задачи 46, 47, 50, 51, 52, 54.

Занятие 8. Признаки Вейерштрасса, Дирихле, Абеля равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов.

2774 г), 2786, 2777, 2775, 2781, 2790.

Дома: 2774 в), 2778, 2789, 2782, 2791, 2780.

Дополн.: гл. I, §6, задачи 879, 881, 895, 917.

Занятие 9. Непрерывность, дифференцируемость и почленное интегрирование функциональных последовательностей и рядов.

2792, 2797, 2802, 2806; используя теорему о предельном переходе, показать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{\ln(n+1)}$ сходится неравномерно на $(0, 2\pi)$.

Дома: 2798, 2799, 2803, 2808, 2808.1.

Дополн.: гл. I, §7, задачи 62, 63, 65.

Занятие 10. Степенные ряды. Формула Коши-Адамара. Разложение в ряд Тейлора.

2812, 2814, 2815, 2830, 2839, 2840, 2843, 2858.

Дома: 2813, 2818, 2827, 2829, 2834, 2853, 2859, 2898.

Дополн.: 1) Привести пример степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, сходящегося неравномерно на $|x| < R$, R – радиус сходимости. 2) гл. I, §7, задача 76.

Занятие 11. Действия над степенными рядами.

2855, 2873 б), 2901, 2906, 2908, 2910, 2911, 2915.

Дома: 2902, 2904, 2907, 2912, 2909, 2899.

Дополн.: гл. I, §6, задачи 1142, 1197, 1216, 1223, 1238, 1257, 1274, 1293.

Обобщенные методы суммирования

Занятие 12. Суммирование расходящихся рядов. Методы Чезаро и Пуассона-Абеля.

1. Привести примеры рядов, не суммируемых ни методом Пуассона-Абеля, ни методом Чезаро $(1 + 1 + 1 + \ldots)$.

2. Привести пример ряда, суммируемого методом Пуассона-Абеля, но не суммируемого методом Чезаро ($\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n n$).

3. Просуммировать ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin(n\theta)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos(n\theta)$ методами Чезаро и Пуассона-Абеля.

4. Показать, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ суммируем методом Чезаро, то необходимо, чтобы $a_n = o(n)$.

5. Доказать теорему Таубера. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ суммируем методом Пуассона-Абеля и имеет обобщенную сумму равную A, при этом $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1+2a_2+\ldots+na_n}{n} = 0$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A$.

Дома: гл. I, §7, задачи 92, 96.

Дополн.: гл. I, §7, задачи 85, 89, 90, 94.

Занятие 13. Контрольная работа.

Двойные интегралы. Вычисление площадей

Занятие 14. Двойные интегралы. Сведение к повторным.

3916, 3918, 3925, 3928, 3932, 3936, 3975.

Дома: 3905, 3909, 3910, 3974, 3922, 3927.

Дополн.: п. 570, задачи 10, 11, 12.

Занятие 15. Замена переменных в двойном интеграле.

3941, 3945, 3953, 3957, 3963, 3967, 3972.

Дома: 3940, 3942, 3947, 3950, 3955, 3958, 3964, 3968.

Дополн.: п. 572, задачи 10, 11; п. 574, задачи 13, 14, 15.

Занятие 16. Вычисление площадей и объемов.

3986, 3987, 3996, 4009, 4007, 4012, 4016, 3995, 4003.

Дома: 3988, 3994, 3999.1, 3999.

Дополн.: п. 583, задача 4 (а, б, в); п. 586, задачи 4, 7, 8, 9.

Тройные интегралы. Вычисление объемов

Занятие 17. Тройные интегралы. Сведение к повторным. Замена переменных.

4081, 4082, 4088, 4076.

Дома: 4077, 4083, 4085, 4087.

Дополн.: п. 625, задачи 3, 4, 8, 9, 10, 11, 12.

Занятие 18. Объёмы. 4090, 4091, 4106, 4110, 4385.1

Дома: 4093, 4102, 4107, 4112, 4127.

Дополн.: п. 637, задачи 7, 8, 10, 11.

Многократные интегралы

Занятие 19. Многократные интегралы.

4208, 4209, 4211 (см. 2281), 4201, 4203, 4204 а).

Дома: 4202, 4204 б), 4210, 4212.

Дополн.: п. 647; п. 650, задачи 3, 4, 5, 6, 7.

Несобственные интегралы

Занятие 20. Несобственные интегралы.

4161, 4164, 4167 *, 4168.

Дома: 4162, 4177, 4184, 4192, 4182.

Дополн.: п. 592, задачи 5, 6, 17, 18, 23.

*Интегралы Френеля $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin x^2\,dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos x^2\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ будут вычислены в 4 семестре, например, в курсе ТФКП (см. 6.50 [9]).

Криволинейные и поверхностные интегралы. Формулы Грина, Стокса и Остроградского - Гаусса. Теория поля

Занятие 21. Криволинейные интегралы.

4221, 4226, 4237, 4251, 4281.

Дома: 4222, 4228, 4232, 4282.

Дополн.: п. 524, задачи 11, 12, 13, 14; п. 529, задачи 1, 2, 3.

Занятие 22. Формула Грина. Полные дифференциалы.

4303, 4307, 4323, 4249, 4266, 4268, 4286, 4290.

Дома: 4302, 4306, 4311, 4324, 4329, 4252, 4262, 4265, 4285, 4289.

Дополн.: п. 540, задачи 1, 2; п. 541, задачи 1, 2, 3; п. 577, задачи 6, 7.

Занятие 23. Поверхностные интегралы первого рода. Вычисление площадей поверхностей.

4343, 4349, 4041, 4048, 4040, 4047.

Дома: 4037, 4049, 4344, 4345.

Дополн.: п. 604, задачи 4, 5, 8, 17; п. 607, задачи 2, 3, 5, 7, 8, 11.

Занятие 24. Поверхностные интегралы второго рода.

4362, 4364, 4366, 4361, 4358.

Дома: 4363, 4365, 4359.

Дополн.: п. 615, задачи 2, 4, 5.

Занятие 25. Формула Стокса.

4367, 4373, 4372, 4369.

Дома: 4368, 4370, 4371, 4374.

Дополн.: п. 615, задачи 9, 10.

Занятие 26. Формула Остроградского.

4391, 4388, 4393, 4390, 4385.

Дома: 4381, 4383, 4387, 4389, 4392, 4395.

Дополн.: п. 629, задачи 4, 5, 6, 8.

Занятие 27. Теория поля.

4431, 4440, 4452.2, 4441, 4457, 4426.

Дома: 4430, 4439, 4442, 4452.1, 4454, 4455.

Дополн.: п. 644, задачи 1, 2, 3; п. 646, задачи 1, 2, 3, 4.

Занятие 28. Контрольная работа.

Варианты контрольной работы по теме "Числовые и функциональные ряды"

Вариант 1

1. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot 5\cdots(3n-1)}{3^n n!}$.

2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(3n)}{\sqrt{n^2+1}}$.

3. Исследовать на абсолютную и условную сходимость бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{x^n}{2^n})$.

4. Исследовать ряд на равномерную сходимость: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(x)\cos(nx)}{\ln(n+x^2)}$, $\quad x \in (-\infty, \infty)$.

5. Определить область E существования функции $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2}$ и исследовать ее на дифференцируемость во внутренних точках E.

6. Найти множество сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(4+(-1)^n)^n}{n}(x-1)^n$.

Вариант 2

1. Исследовать ряд на сходимость: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{\ln \frac{n+1}{n}})$.

2. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos n \frac{\ln^{\alpha} n}{n^p}$.

3. Найти область сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(1+x^r)^n}{\sqrt{n!}}$.

4. Исследовать на равномерную сходимость на области сходимости

а) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n^2x^2} \sin(nx)$,

б) последовательность $f_n(x) = nx(1-x)^n$.

5. Исследовать на непрерывность на области существования сумму ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{n \ln^2 n}$.

6. Определить радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} x^n$.

7. Разложить в ряд Тейлора по степеням x функцию $f(x) = \operatorname{arctg} x^2$, указать область сходимости ряда.

Варианты контрольной работы по теме "Интегралы"

Вариант 1

1. Найти $\iint\limits_G (y/x)^2\, dxdy$, $\quad G = \{(x,y) :\ 1 \le x^2+y^2 \le 2x\}$.

2. Найти $\iiint\limits_G (x^2 - z^2)\, dxdydz$, где G ограничена плоскостями $y = -x, z = x$, $z = y$, $z = 1$.

3. Найти $\iint\limits_S (x+y+z)\, dS$, где S – часть сферы $x^2+y^2+z^2 = 1$, $z \ge 0$.

4. Найти поток поля $(x+z)\mathbf{i} + (y+x)\mathbf{j} + (z+y)\mathbf{k}$ через полную внешнюю поверхность тела $x^2+y^2 \le R^2$, $0 \le z \le y$.

5. Найти циркуляцию поля $z^2\mathbf{i}+x^2\mathbf{j}+y^2\mathbf{k}$ вдоль контура $\Gamma = \{(x,y) :\ x^2+y^2+z^2 = 1,\ x+y+z = 1\}$.

Вариант 2

1. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми: $xy = a$, $xy = b$, $y = cx^2$, $y = dx^2$, $0 \le a \le b$, $0 \le c \le d$.

2. Найти объем тела V, ограниченного поверхностями: $x^2+y^2+z^2 = R^2$, $x^2 + y^2 + (z-r)^2 = R^2$, $0 \le r \le R$, точка $(0,0,r) \in V$.

3. Найти площадь части поверхности $z = \sqrt{x^2-y^2}$, заключенной внутри цилиндра $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$.

4. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_C (ydx + zdy + xdz)$, C – пересечение плоскости $x+y+z = 0$ и поверхности $z = x^2+y^2$. Направление обхода – против часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси OX.

5. Вычислить поверхностный интеграл $\iint\limits_S \frac{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma}{r^3} dS$, $S : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ – направляющие косинусы внешней нормали.

6. Найти поток вектора $\mathbf{a} = \{x^3, y^3, z^3\}$ через поверхность $x^2+y^2+z^2 = x$.

Вопросы к коллоквиуму по теме "Числовые ряды. Функциональные последовательности и ряды"

1. Понятие числового ряда. Критерий Коши. Необходимое и достаточное условие сходимости рядов с неотрицательными членами.

Признаки сходимости рядов с неотрицательными членами (вопросы 2 – 4)

2. Признаки сравнения.

3. Признаки Даламбера и Коши, их сравнение.

4. Признак Коши-Маклорена.

5. Теорема Римана о перестановке членов в числовых рядах.

6. Теорема Коши о перестановке членов в числовых рядах.

7. Последовательности с ограниченным изменением и их свойства.

8. Признаки сходимости произвольных числовых рядов (Абеля, Дирихле-Абеля, Лейбница).

9. Теорема Мертенса.

10. Взаимосвязь между сходимостью четырех рядов: повторных, двойного и "одинарного".

11. Метод Чезаро суммирования расходящихся рядов, примеры.

12. Метод Пуассона-Абеля суммирования расходящихся рядов, примеры.

13. Бесконечные произведения и их свойства.

14. Последовательности с равномерно ограниченным изменением и их свойства.

15. Признаки Абеля, Дирихле-Абеля равномерной сходимости функциональных рядов.

16. Признак Дини равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов.

17. Непрерывность суммы функционального ряда.

18. Почленное интегрирование функциональных рядов.

19. Почленное дифференцирование функциональных последовательностей.

20. Сходимость в среднем, связь с равномерной сходимостью, теорема о почленном интегрировании.

21. Теорема Арцела.

22. Теорема Коши-Адамара.

23. Функциональные свойства степенных рядов.

Задачи для коллоквиума

1. ([13], гл. I, § 7, задача 2) Пусть $a_n > 0$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{S_n}{n}$ расходится.

2. ([13], гл. I, § 7, задача 8) Привести пример сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$, для которого $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, na_n > 0$.

3. Привести пример расходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$, $a_n > 0$, для которого $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

4. ([13], гл. I, § 7, задача 42) Пусть $f \in C^1[1, +\infty)$ и $\int\limits_1^{\infty} f'(x)\, dx$ сходится абсолютно. Доказать, что сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ эквивалентна сходимости интеграла $\int\limits_1^{\infty} f(x)\, dx$.

5. ([13], гл. I, § 7, задача 41а) Пусть последовательность $\{a_n\}$ монотонна, но не является бесконечно малой. Доказать, что ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\alpha$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\alpha$ расходятся при всех $\alpha \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

6. ([13], гл. I, § 7, задача 41б) Пусть последовательность $\{a_n\}$ монотонна и является бесконечно малой, причем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. Доказать, что ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\alpha$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\alpha$ сходятся условно при всех $\alpha \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

7. Пусть ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся условно, а их произведение по Коши $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится. Доказать, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n\right)$.

8. Доказать, что любую последовательность с ограниченным изменением можно представить в виде разности двух монотонных ограниченных последовательностей.

9. Для любой последовательности $\{a_{mn}\}$, $m, n \in \mathbb{N}$, обозначим $\Delta_{1,0}(a_{mn}) = a_{mn} - a_{m+1,n}$, $\Delta_{0,1}(a_{mn}) = a_{mn} - a_{m,n+1}$, $\Delta_{1,1}(a_{mn}) = a_{mn} - a_{m+1,n} - a_{m,n+1} + a_{m+1,n+1}$. Проверить, что для двойных сумм имеет место преобразование Харди:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij} = \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1} S_{ij}\Delta_{1,1}(b_{ij}) + \sum_{i=1}^{m-1} S_{in}\Delta_{1,0}(b_{in}) + \sum_{j=1}^{n-1} S_{mj}\Delta_{0,1}(b_{mj}) + S_{mn}b_{mn},$$

где $S_{ij} = \sum\limits_{p=1}^{i}\sum\limits_{q=1}^{j} a_{pq}$. В качестве применения исследовать на сходимость двойной ряд $\sum\limits_{i,j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+j}}{(i+j)^{\alpha}}$, $\alpha > 0$.

10. ([13], гл. I, § 7, задача 46) Пусть $M \subset \mathbb{R}$ — произвольное множество и последовательность $\{f_n(x)\}$ непрерывных на $\overline{M}$ функций сходится равномерно на M. Доказать, что она сходится равномерно на $\overline{M}$.

11. ([13], гл. I, § 7, задача 50) Может ли последовательность разрывных на $[a, b]$ функций равномерно сходиться на $[a, b]$ к непрерывной функции?

12. ([13], гл. I, § 7, задача 51) Может ли последовательность непрерывных на $[a, b]$ функций равномерно сходиться на $[a, b]$ к разрывной функции?

13. ([13], гл. I, § 7, задача 55) Привести пример двух последовательностей $\{u_n(x)\}$, $\{v_n(x)\}$, равномерно сходящихся на $[0, 1]$ таких, что последовательность $\{u_n(x)v_n(x)\}$ сходится на $[0, 1]$ неравномерно.

14. ([13], гл. I, § 7, задача 65) Показать, что последовательность гладких функций $f_n(x) = n^{-1/2} \sin nx$ равномерно сходится на $\mathbb{R}$, а последовательность $\{f_n'(x)\}$ расходится в каждой точке $x \in \mathbb{R}$.

15. Исследовать последовательность $\{x^n\}$ на равностепенную непрерывность на множестве E, где: а) $E = [0, \frac{1}{2}]$; б) $E = [0, 1]$.

16. Найти сумму функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^3 x^n$.

17. Просуммировать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2$ методом Пуассона–Абеля.

18. ([13], гл. I, § 7, задача 89) Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ суммируем методом Чезаро и $a_n = o(1/n)$ при $n \to \infty$. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

19. ([13], гл. I, § 7, задача 96) Доказать, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ суммируем методом Абеля, то для любого $\varepsilon > 0$ имеем $a_n = o((1+\varepsilon)^n)$ при $n \to \infty$.

Вариант зачётной комиссии

1. Исследовать на абсолютную и условную сходимость относительно параметра α:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos 10n}{n^\alpha \ln(n+1)}.$$

2. Разложить в степенной ряд по степеням x, определить область сходимости:

$$f(x) = \frac{5}{6 + x - x^2}.$$

3. Исследовать функцию на непрерывность:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-5nx}, \quad x > 0.$$

4. Найти объём тела, ограниченного поверхностями

$$z = 3\sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = 10 - x^2 - y^2.$$

5. Найти

$$0,1 \cdot grad\left(e^{div\,(r^2 \vec{r})}\right), \quad \text{где} \quad r = |\vec{r}|, \ \vec{r} = \{x, y, z\}.$$

6. Найти поток $\vec{p}$ через часть Π поверхности S, вырезаемую плоскостью π:

$$\vec{p} = \{x, y+z, z-y\}, \quad S: \ x^2 + y^2 + z^2 = 9, \quad \pi: \ z = 0 \ (z \geq 0)$$

(нормаль – внешняя к замкнутой поверхности, образуемой данными поверхностями, Π – *незамкнутая* поверхность).

Вопросы к экзамену

В каждом экзаменационном билете содержится один вопрос.

1. Понятие числового ряда. Критерий Коши. Необходимое и достаточное условие сходимости рядов с неотрицательными членами.

2. Признаки сходимости рядов с неотрицательными членами (признаки сравнения, Даламбера, Коши, Коши-Маклорена).

3. Теоремы Коши и Римана о перестановке членов в числовых рядах.

4. Признаки сходимости произвольных числовых рядов (два признака Абеля, признаки Дирихле-Абеля, Лейбница).

5. Арифметические операции над сходящимися числовыми рядами. Теорема Мертенса.

6. Бесконечные произведения, критерии их сходимости.

7. Необходимое условие сходимости двойного ряда. Связь между сходимостью двойного ряда и повторного ряда. Критерий сходимости двойного ряда с неотрицательными членами.

8. Абсолютная сходимость двойного ряда. Взаимосвязь между сходимостью четырех рядов: повторных, двойного и "одинарного".

9. Обобщенные методы суммирования расходящихся рядов (методы Чезаро и Пуассона-Абеля).

10. Функциональные последовательности и ряды. Равномерная сходимость. Критерий Коши.

11. Признаки равномерной сходимости функциональных рядов (два признака Абеля, признаки Дирихле-Абеля, Вейерштрасса).

12. Признак Дини равномерной сходимости функциональных рядов и последовательностей. Почленный переход к пределу, непрерывность предельной функции функциональных последовательностей и рядов.

13. Почленное дифференцирование, существование первообразных функций для функциональных последовательностей и рядов.

14. Почленное интегрирование функциональных последовательностей и рядов (две теоремы). Сходимость в среднем, связь с равномерной сходимостью.

15. Теорема Арцела. Признак равностепенной непрерывности функциональной последовательности.

16. Степенные ряды. Теорема Коши-Адамара. Непрерывность суммы, почленное интегрирование и дифференцирование степенного ряда. Разложение функций в степенные ряды.

17. Определение и доказательство существования двойного интеграла при помощи прямоугольных разбиений области. Классы интегрируемых функций. Основные свойства двойного интеграла.

18. Определение двойного интеграла при помощи произвольных разбиений области. Эквивалентность двух определений.

19. Сведение двойного интеграла к повторному однократному.

20. Кратные несобственные интегралы от неотрицательных функций. Признаки сходимости.

21. Кратные несобственные интегралы от знакопеременных функций. Эквивалентность понятий сходимости и абсолютной сходимости.

22. Криволинейные интегралы первого и второго рода.

23. Понятие поверхности. Нормаль и касательная плоскость к поверхности. Лемма о проекции окрестности точки на касательную плоскость.

24. Площадь поверхности. Квадрируемость поверхности.

25. Поверхностные интегралы первого и второго рода.

26. Преобразование базисов. Инварианты линейного оператора.

27. Дивергенция, ротор и производная по направлению векторного поля. Повторные операции теории поля.

28. Формула Грина. Формула Остроградского-Гаусса.

29. Формула Стокса.

30. Условия независимости криволинейного интеграла второго рода на плоскости от пути интегрирования.

Задачи к экзамену

1. Привести пример расходящегося ряда, для которого выполнено необходимое условие сходимости.

2.1. Привести пример сходящегося ряда с положительными членами, для которого последовательность $\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\}$ расходится, но существует $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^{\frac{1}{n}}$.

2.2. Для каких вещественных α, β сходится ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(\ln n)^{\alpha}n^{\beta}$?

3. Найти суммы рядов $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$, $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\ldots$. Переставить слагаемые ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ так, чтобы новый ряд стал расходящимся.

4.1. Доказать, что при $x\neq 2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$ справедливы оценки

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right|\leq\frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|},\left|\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right|\leq\frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|}.$$

4.2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость для $x,\alpha\in\mathbb{R}$ ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^{\alpha}}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^{\alpha}}$.

5. Привести пример двух сходящихся рядов, произведение по Коши которых расходится.

6. Привести пример сходящегося бесконечного произведения $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$, для которого ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ расходятся.

7. Привести пример бесконечной матрицы $||a_{mn}||$ для которой

а) $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty}a_{mn}$ сходится, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{m=1}^{\infty}a_{mn}$, $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{mn}$ расходятся;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{m=1}^{\infty}a_{mn}$, $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{mn}$ сходятся, $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty}a_{mn}$ расходится.

8. Исследовать на сходимость $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty}(m+n)^{\alpha}$.

9. Просуммировать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^2$ методом Пуассона-Абеля и доказать, что он не суммируем методом Чезаро.

10. Доказать необходимое условие суммируемости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k$ по Чезаро: $u_k = o(k),\ k\to\infty$. Доказать, что при этом и $S_k = o(k)$.

11. Имеет ли функциональная последовательность $\{x^n\}$ равномерно ограниченное изменение на множестве а) $(0,\frac{1}{2})$, б) $(0,1)$? Ответ обосновать.

12.1. Доказать, что последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходится к f на множестве X тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n\to\infty}\sup_{x\in X}|f_n(x)-f(x)|=0$.

12.2. Привести пример равномерно сходящегося ряда, у которого нет сходящегося мажорантного ряда.

13. Исследовать ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$ на равномерную сходимость на множестве X в случаях: а) $X=[\delta,2\pi-\delta]$, $0<\delta<\pi$, б) $X=(0,2\pi)$.

14. Показать, что каждое из четырех условий признака Дини равномерной сходимости является существенным.

15. Доказать, что $\zeta(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ бесконечно дифференцируема при $x>1$.

16. Пусть $f_n(x)=\begin{cases} n^\alpha,\ x\in(0,\frac{1}{n}),\\ 0,\ x=0,\\ 0,\ x\in[\frac{1}{n},1],\end{cases}$. При каких значениях α последовательность $\{f_n(x)\}$: а) сходится в каждой точке отрезка $[0,1]$,

б) сходится равномерно на отрезке $[0,1]$,

в) сходится в среднем на отрезке $[0,1]$,

г) такова, что $\int\limits_0^1\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)\,dx=\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 f_n(x)\,dx$.

17. Исследовать последовательности на равностепенную непрерывность на множествах: $\{x^n\}$ на $(0,\frac{1}{2})$ и на $(0,1)$, $\{\sin^n x\}$ на $[0,\frac{\pi}{4}]$ и на $[0,\frac{\pi}{2}]$, $\{\frac{\sin nx}{n}\}$, $\{\frac{\cos nx}{n}\}$, $\{\frac{\sin^2 nx}{n}\}$, $\{\frac{\cos^2 nx}{n}\}$ на всей числовой прямой.

18. Следует ли из равномерной сходимости функциональной последовательности на множестве ее равномерная ограниченность на этом множестве?

19. Следует ли из монотонности функциональной последовательности на отрезке монотонность каждого члена функциональной последовательности на этом множестве? Является ли монотонной функциональная последовательность $\{\frac{\sin x}{n}\}$ на множестве а) $[0,\pi]$, б) $[0,2\pi]$?

20. Является ли функциональная последовательность с равномерно ограниченным изменением на множестве равномерно ограниченной на этом множестве?

21. Как можно использовать теорему Арцела для установления факта отсутствия равностепенной непрерывности у функциональной последовательности на отрезке (интервале)? Привести пример.

22.1. Разложить в степенной ряд с центром в нуле функцию $f(x)=\ln(1+x^4)$. Указать множество, на котором данный ряд сходится к функции $f(x)$.

22.2. Разложить в степенной ряд с центром $x_0=1$ функцию $f(x)=\ln(1+x^2)$. Указать множество, на котором данный ряд сходится к функции $f(x)$.

23. Сформулировать теорему о замене переменных в кратном интеграле. Какой вид примет формула замены переменных для полярных, цилиндрических и сферических координат. Ответ обосновать.

24.1. Сформулировать формулу замены переменных в кратном интеграле и вычислить $\iint\limits_G\frac{dxdy}{y}$, где область G ограничена прямыми $y=x$, $y=3x$, $y=2-x$, $y=6-3x$.

24.2. Изменить порядок интегрирования

$$\int\limits_0^3 dz\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^{2-2y}f(x,y,z)dx.$$

25. Вычислить $\int\limits_0^1 dx\int\limits_{\sqrt{x}}^1 x(1+y^5)^{\frac{1}{4}}dy$.

26. Исходя из определения кратного несобственного интеграла, сформулировать теорему о замене переменных в кратном несобственном интеграле.

27. Вычислить и обосновать $\iint\limits_{\mathbb{R}^2}e^{-x^2-y^2}dxdy$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx$.

28. Доказать, что интеграл $\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\sin(x^2+y^2)\,dxdy$ расходится.

29. Пусть $f\in C(\mathbb{R})$. Найти работу поля $F=f(r)\mathbf{r}$, вдоль гладкого контура с началом в точке $A(x_1,y_1,z_1)$ и концом в точке $B(x_2,y_2,z_2)$. (Здесь $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки, $r=|\mathbf{r}|$.)

30. Доказать, что эллипсоид $\Phi=\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\}$ является гладкой поверхностью. Найти уравнение касательной плоскости и внешней единичной

нормали в точке $(x_0, y_0, z_0) \in \Phi$.

31. Пусть $f(x) \in C^1[a,b]$ — положительная функция. Доказать, что площадь поверхности, образованной вращением графика этой функции вокруг оси абсцисс равна

$$\sigma = 2\pi \int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx.$$

32. Доказать формулу Пуассона

$$\iint\limits_S f(ax+by+cz)dS = 2\pi \int\limits_{-1}^{1} f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\ t)dt.$$

Здесь $f \in C[-\sqrt{a^2+b^2+c^2}, \sqrt{a^2+b^2+c^2}]$, $S = \{(x,y) : x^2+y^2+z^2=1\}$.

33. Пусть $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ — дифференцируемые векторные поля. Доказать, что

$$\operatorname{div}[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = (\mathbf{b}, \operatorname{rot} \mathbf{a}) - (\mathbf{a}, \operatorname{rot} \mathbf{b}).$$

34. Пусть u, $\mathbf{a}$ — дифференцируемые скалярное и векторное поля. Доказать, что

$$\operatorname{rot}(u\mathbf{a}) = u \operatorname{rot} \mathbf{a} + [\operatorname{grad} u, \mathbf{a}].$$

35. Пусть $G \in \mathbb{R}^3$ — ограниченная область с гладкой границей S, $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к S, $\mathbf{r} = (\xi - x)\mathbf{i} + (\eta - y)\mathbf{j} + (\zeta - z)\mathbf{k}$, $r = |\mathbf{r}|$, $(x,y,z) \notin S$. Вычислить

$$\iint\limits_S \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} dS.$$

36. Пусть C — замкнутый гладкий контур, расположенный в плоскости

$$\Pi = \{(x,y) : x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p\}$$

($\mathbf{n} = \{cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ — единичная нормаль к плоскости Π) и ограничивающий площадку S. Вычислить

$$\int\limits_C \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x & y & z \end{vmatrix},$$

где контур C ориентирован согласованно с плоскостью.

37. Выяснить, потенциально ли поле $H = \frac{-y\mathbf{i}+x\mathbf{j}}{x^2+y^2}$ а) в полуплоскости $x > 0$; б) в области $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$.

38. Исходя из определения, выяснить, является ли данное векторное поле дифференцируемым. Пусть $\mathbf{a} = const, \alpha \in \mathbb{R}$. Исследовать векторные поля $\mathbf{p}(\mathbf{r}) = \mathbf{r} + \mathbf{a}$, $\quad \mathbf{p}(\mathbf{r}) = [\mathbf{a}, \mathbf{r}]$, $\quad \mathbf{p}(\mathbf{r}) = \alpha\mathbf{r}$, $\quad \mathbf{p}(\mathbf{r}) = |\mathbf{a}|\mathbf{r}$, $\quad \mathbf{p}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}^2\mathbf{r}$.

4 семестр

В 4 семестре проводится примерно 11 семинарских занятий по математическому анализу, включая одну контрольную работу по интегралам, зависящим от параметра, и одну самостоятельную работу по рядам Фурье (на 1 час). Как и прежде, номера задач для семинарских и домашних занятий даны по задачнику Б. П. Демидовича [3], а номера дополнительных задач — по пособию И. А. Виноградовой, С. Н. Олехника и В. А. Садовничего [12]. Приведены образцы типичных контрольных и самостоятельных работ, вариант для зачетной комиссии и список задач к коллоквиуму по теме "Интегралы, зависящие от параметра". Также приведён примерный список вопросов к коллоквиуму и к экзамену.

Кроме того, проводится 15 – 16 семинарских занятий, включая контрольную работу по курсу теории функций комплексного переменного. Номера задач для семинарских и домашних занятий даны по задачнику Т. А. Леонтьевой, В. С. Панферова и В. С. Серова [8], а номера дополнительных задач — по задачникам [7], [17]. Приведён типичный вариант контрольной работы, примерный список вопросов к коллоквиуму и к экзамену, а также списки задач, рекомендуемых при подготовке к коллоквиуму и к экзамену.

Программа семинарских занятий по математическому анализу

Интегралы, зависящие от параметра

Занятие 1. Собственные интегралы, зависящие от параметра, с постоянными пределами интегрирования.

3712, 3713(в,г), 3711, 3714, 3714.1, 3726.

Дома: 3713(а,б), 3713.1, 3715, 3723. Найти $\lim\limits_{t\to 0+} \frac{1}{t}\int\limits_1^3 \sin(tx)\sqrt{x^2+t^2+tx+1}\,dx$.

Дополн.: гл. I, §4, задачи 396 – 402, 408, 409, 412, 421, 422.

Занятие 2. Собственные интегралы, зависящие от параметра, с переменными пределами интегрирования. Свойства собственных интегралов, зависящих от параметра.

3716, 3718(б), 3717, 3728, 3734, 3737.

Дома: 3718(а,д), 3730, 3738, 3732, 3735.

Дополн.: гл. I, §5, задачи 57, 58; §4, задачи 440, 469, 470.

Занятие 3. Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Равномерная сходимость.

3741, 3745, 3753, 3755, 3755.1, 3752, 3773.

Дома: 3742, 3746, 3754, 3755.2, 3755.3.

Дополн.: гл. I, §4, задачи 506, 512, 517, 521, 529, 538.

Занятие 4. Признаки Вейерштрасса, Дирихле и Абеля равномерной сходимости.

3756, 3757, 3760.1, 3761. Исследовать $\int\limits_0^\infty \frac{x\cos\alpha x}{1+x^2}\,dx$ на равномерную сходимость на множестве: а) $\alpha \in (\alpha_0, +\infty)$, $\alpha_0 > 0$; б) $\alpha \in (0, +\infty)$.

Дома: 3760, 3763, 3766, 3767, 3768, 3776.2. Исследовать на равномерную сходимость интегралы: $\int\limits_0^\infty \frac{t\sin tx}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ на множестве $t \in [0,1]$; $\int\limits_1^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}(1+\alpha^2x^2)}\,dx$ на множестве $\alpha \in (-\infty, +\infty)$.

Дополн.: гл. I, §4, задачи 550, 551, 543, 559, 560, 561; §5, задачи 63, 68, 69.

Занятие 5. Свойства несобственных интегралов, зависящих от параметра. Формула Фруллани.

3777, 3777.1, 3779, 3782, 3789, 3788, 3792.

Дома: 3787, 3776.1, 3780, 3781, 3791, 3784, 3796.

Дополн.: гл. I, §4, задачи 586, 589, 599, 616, 623.

Занятие 6. Вычисление несобственных интегралов, зависящих от параметра. Интегралы Пуассона, Дирихле, Лапласа.

3776 †, 3797, 3804, 3806, 3817, 3820, 3801, 3776*.

†Интеграл Пуассона уже был вычислен на лекции в 3 семестре при изучении несобственных кратных интегралов. В задаче 3776 предлагается другой способ вычисления этого интеграла. Он позволяет попутно вывести формулу Валлиса, представляющую число π как предел рациональных дробей.

Дома: 3807, 3811, 3811.1, 3813, 3815, 3818, 3822.

Дополн.: гл. I, §4, задачи 636, 649, 659, 666, 690, 691.

Занятие 7. Эйлеровы интегралы.

3843, 3848, 3868, 3870, 3850, 3851, 3861.

Дома: 3844, 3845, 3847, 3849, 3856, 3860, 3863, 3857.

Дополн.: гл. III, §12, задачи 184, 205, 218, 225, 238.

Занятие 8. Контрольная работа.

Ряды Фурье. Интеграл Фурье и преобразование Фурье

Занятие 9. Ряды Фурье. Разложение на $[-\pi, \pi]$.

2937, 2938, 2940, 2946, 2959, 2962, 2984.

Дома: 2936, 2942, 2943, 2945, 2985.

Дополн.: гл. II, §4, задачи 79(а,б), 81; §5, задача 14.

Занятие 10. Ряды Фурье. Разложение на $[a, b]$.

2961, 2955, 2964, 2949, 2966, 2975, 2978, 2979.

Дома: 2963, 2956, 2948, 2967, 2976, 2977.

Дополн.: гл. II, §4, задачи 77, 98, 102. §5, задача 24.

Занятие 11. Самостоятельная работа (1 час). Интеграл Фурье и преобразование Фурье.

3881, 3887, 3893, 3898, 3895.

Дома: 3882, 3888, 3896, 3900.

Дополн.: гл. II, §4, задачи 162, 181, 195–197, 199.

Варианты контрольной работы по теме "Интегралы, зависящие от параметра"

Вариант 1

1. Исследовать на равномерную сходимость на области существования интегралы: а) $\int\limits_0^1 \frac{x^n\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-\alpha)^2}\,dx$.

2. Исследовать интеграл $\int\limits_0^\infty \alpha e^{-x\alpha^2}\,dx$ на непрерывность на области существования.

3. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t^{3/2}}\,dt$, $a>0$, $b>0$.

4. Определить область существования интеграла $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^3\,dx}{(2+x^3)^p}$ и вычислить этот интеграл.

Вариант 2

1. Найти $F'(a)$, если $F(a)=\int\limits_0^a \frac{\ln(1+ax)}{x}\,dx$.

2. Исследовать на равномерную сходимость $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin(sx)\,dx}{\sqrt{s^2+(x-s)^2}}$ в случаях: а) $s\in(1,2)$; б) $s\in(0,+\infty)$.

3. Исследовать на непрерывность $I(a)=\int\limits_1^{\infty}\frac{\ln x\,dx}{1+(x-a)^2}$, $a\in(-\infty,+\infty)$.

4. Вычислить $\int\limits_0^{\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\sin\lambda x\,dx$, $a>0$, $b>0$. Обосновать вычисление.

5. Вычислить $\int\limits_0^{\pi/2}\sin^{3/2}x\cos^{1/2}x\,dx$.

Варианты самостоятельной работы по теме "Ряды Фурье"

Вариант 1

1. Разложить в ряд Фурье на отрезке $[-\pi,\pi]$ функцию $f(x)=\operatorname{sign}(\sin x)$, нарисовать график суммы ряда и исследовать ряд на равномерную сходимость на $[-\pi,\pi]$.

2. Разложить в ряд Фурье по косинусам функцию $f(x)=\sin ax$, $x\in[0,\pi]$, нарисовать график суммы ряда и исследовать ряд на равномерную сходимость на $[-\pi,\pi]$.

Вариант 2

1. Разложить функцию $f(x)=\begin{cases} x, & x\in[0,\frac{\pi}{2}],\\ \pi-x, & x\in(\frac{\pi}{2},\pi]\end{cases}$ по косинусам кратных дуг, нарисовать графики функции $f(x)$ и суммы ряда Фурье.

2. Разложить в ряд Фурье функцию, заданную на $[0,3\pi]$:
$f(x)=\begin{cases} 0, & x\in[0,\pi]\cup[2\pi,3\pi],\\ 1, & x\in(\pi,2\pi)\end{cases}$, нарисовать график суммы ряда Фурье.

Вопросы к коллоквиуму по теме "Интегралы, зависящие от параметра"

1. Собственные интегралы, зависящие от параметра (ИЗП). Случай постоянных пределов интегрирования.

2. Собственные ИЗП. Случай переменных пределов интегрирования.

3. Равномерная сходимость несобственных ИЗП. Примеры. Критерий Коши.

4. Признаки равномерной сходимости несобственных ИЗП (Вейерштрасса, Дирихле-Абеля, Дини).

5. Непрерывность и интегрируемость несобственных ИЗП на отрезке.

6. Дифференцируемость несобственных ИЗП.

7. Интегрируемость несобственных ИЗП на полупрямой.

8. Вычисление интеграла Дирихле.

9. Свойства Г-функции Эйлера.

10. Свойства В-функции Эйлера. Связь между эйлеровыми интегралами.

11. Вывод асимптотической формулы для интеграла $\int\limits_{-a}^{a} e^{-\lambda t^2} f(t)\,dt$, $\lambda\to+\infty$.

12. Асимптотическая формула для функции $\Gamma(\lambda+1)$, $\lambda\to+\infty$. Формула Стирлинга.

Задачи для коллоквиума

1. ([12], гл. I, § 5, задача 53) Пусть $f\in C[0,1]$. Доказать, что $\lim\limits_{y\to 0}\int\limits_0^1 y^{-2}\exp(-xy^{-2})f(x)\,dx=f(0)$.

2. Доказать, что $\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}\,dx$ сходится неравномерно по $\alpha\in(0,+\infty)$, но замена $y=\alpha x$ превращает его в равномерно сходящийся интеграл.

3. ([12], гл. I, § 5, задача 57) Задана функция
$f(x,y)=\begin{cases}\frac{y-x}{(x+y)^3}, & y>0, 0\le x\le 1,\\ 1, & y=0, 0\le x\le 1.\end{cases}$ Показать, что функция $F(y)=\int\limits_0^1 f(x,y)\,dx$ определена и непрерывна на $[0,1]$, функция $f(x,y)$ интегрируема на $[0,1]$ для любого $x\in[0,1]$, но $\int\limits_0^1 F(y)\,dy\ne\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 f(x,y)\,dy$.

4. ([12], гл. I, § 5, задача 61) Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна на $[a,+\infty)\times[c,d]$ и интеграл $\int\limits_a^{\infty} f(x,y)\,dx$ сходится равномерно на (c,d). Доказать, что этот интеграл сходится равномерно на $[c,d]$.

5. ([12], гл. I, § 5, задача 63) Задана функция $f(x,y)=\begin{cases} 0, & y=0,\ x>0,\\ 1, & y>0,\ 0\le x\le 1/y,\\ 0, & y>0,\ x>1/y.\end{cases}$

Показать, что интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\frac{f(x,y)\sin x}{x}\,dx$ сходится равномерно на $[0,1]$, а интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\frac{f(x,y)|\sin x|}{x}\,dx$ сходится неравномерно на $[0,1]$.

6. ([12], гл. I, § 5, задача 68)

Задана функция $f(x,y)=\begin{cases} 0, & y=0,\ x\ge 0,\\ 1, & 0<y\le 1,\ 0\le x\le 1/y,\\ \frac{1}{xy}, & 0<y\le 1,\ x>1/y.\end{cases}$

Показать, что при любом $y_0\in[0,1]$ функция $f(x,y_0)$ монотонна на $[0,+\infty)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x,y_0)=0$, но интеграл $\int\limits_0^{+\infty} f(x,y)\sin x\,dx$ сходится неравномерно на $[0,1]$. Какое условие признака Дирихле нарушено?

7. ([12], гл. I, § 5, задача 69) Пусть интеграл $\int\limits_0^{+\infty} f(x,y)\sin x\,dx$ сходится равномерно на M и для любого $y_0\in M$ функция $f(x,y_0)$ монотонна на $[0,+\infty)$ и стремится к нулю при $x\to+\infty$. Доказать, что $f(x,y)$ при $x\to+\infty$ сходится к нулю равномерно на M.

8. ([12], гл. I, § 5, задача 71) Доказать, что интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-xy}\cos x\,dx$ сходится неравномерно на $(0,1)$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_{2\pi(n-1)^2}^{2\pi n^2} e^{-xy}\cos x\,dx$ сходится равномерно на $(0,1)$.

9. ([12], гл. III, § 5, пр. 14) Доказать, что $\Gamma(\frac{1}{n})\Gamma(\frac{2}{n})\ldots\Gamma(\frac{n-1}{n})=(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}n^{-\frac{1}{2}}$ для всех натуральных n.

Программа семинарских занятий по теории функций комплексного переменного (ТФКП)

Занятие 1. Комплексные числа и их свойства

1.2 1), 3), 8), 10); 1.4 1), 3), 5), 7); 1.11 1), 2); 1.13 1), 2), 3), 6); 1.14; 1.25 1) – 5).

Дома: 1.2 4), 5), 6), 9); 1.4 2), 4), 6), 8); 1.11 3), 4); 1.13 4), 5), 7), 8); 1.15; 1.25 6) – 11). Дополн.: [7] 4; 9; 15; 16; 60. [16] 1.09; 1.14; 1.27; 1.28; 1.31; 1.59; 1.64; 1.65.

Занятие 2. Последовательности, ряды и бесконечные произведения комплексных чисел.

2.3; 2.5; 2.8; 2.18; 2.20; 2.23 1), 2); 2.27; 2.29 4), 6); 2.52; 2.53; 2.56 1), 2); 2.73 1), 3) 5).

Дома: 2.4; 2.7; 2.12; 2.26; 2.28; 2.51; 2.55; 2.56 3), 4); 2.57 2), 4), 6).

Дополн.: [7] 438; 443; 444. [16] 2.10; 2.12; 2.15; 2.21; 2.27; 2.33.

Занятие 3. Функции комплексного переменного. Непрерывность и равномерная непрерывность.

3.25; 3.26; 3.27 4), 10); 3.33 1), 3) 8); 3.34; 3.37.

Дома: 3.23; 3.27 5), 6), 11); 3.28; 3.33 2), 6) 9); 3.36 1)–8); 3.46.

Дополн.: [7] 71; 74; 100; 102; 104. [16] 3.08; 3.10.

Занятие 4. Дифференцируемость функций комплексного переменного.

5.1 1), 4) 9); 5.3; 5.4; 5.8 а); 5.9.

Дома: 5.1 2), 3), 5), 13), 14); 5.7; 5.8 б); 5.11; 5.12; 5.14.

Дополн.: [7] 105; 110; 111; 128–131. [16] 8.08; 8.15; 8.16; 8.39; 8.40; 8.56; 9.09; 9.10.

Занятие 5. Интегрирование функций комплексного переменного. Интегральная теорема Коши, вычисление интегралов.

6.5; 6.7; 6.9; 6.12; 6.15 1); 6.24; 6.27; 6.49; 6.53; 6.60.

Дома: 6.6; 6.10; 6.11; 6.15 3); 6.28; 6.29; 6.50; 6.52; 6.62.

Дополн.: [7] 402; 403; 405; 412. [16] 10.07; 10.11; 10.13; 10.19.

Занятие 6. Интегральная формула Коши, интеграл типа Коши.

7.4; 7.6 1), 4), 6), 9); 7.8; 7.15; 7.20.

Дома: 7.5; 7.6 2), 3), 5); 7.10; 7.11; 7.12; 7.17.

Дополн.: [7] 427; 428; 429. [16] 10.24; 10.29; 10.35; 10.46; 10.47; 10.48.

Занятие 7. Степенные ряды. Ряды из аналитических функций.

8.2 1), 4), 9), 10); 8.3 1), 3), 4); 8.6 1), 2); 8.8; 8.9; 8.12.

Дома: 8.2 2), 3), 5), 6); 8.3 2), 5), 6); 8.6 3); 8.13*.

Дополн.: [7] 469; 491; 508. [16] 11.04; 11.05; 11.06; 11.11; 11.17.

Занятие 8. Разложение аналитической функции в ряд Тейлора. Нули аналитических функций.

8.14 1), 3), 7); 8.15; 8.16 11), 12), 13); 8.18 1), 2); 8.19; 8.26 1); 8.47 1), 2), 3), 4).

Дома: 8.14 2), 4), 5), 6); 8.16 7), 8), 9), 10); 8.17, 2); 8.18 3), 4); 8.20; 8.26 2); 8.48.

Дополн.: [7] 467; 477; 478. [16] 6.08; 6.31; 6.32.

Занятие 9. Ряды Лорана.

9.16 1), 2), 3); 9.17 1), 3), 6); 9.21; 9.23 1), 2); 9.24; 9.25 1)–5); 9.26 1).

Дома: 9.16 4)–7); 9.17 2), 4), 5), 7); 9.18; 9.19; 9.23 3), 4); 9.25 6)–10); 9.26 3), 4).

Дополн.: [7] 576; 577; 579; 585. [16] 20.08; 20.09; 20.16 1)–5); 20.32.

Занятие 10. Изолированные особые точки.

9.27 1)–4); 9.28; 9.31 1), 2); 9.37; 9.40.

Дома: 9.27 5)–9); 9.29; 9.31 3), 4); 9.32; 9.36; 9.39.

Дополн.: [7] 606; 607; 612; 628; 629; 640. [16] 19.03; 19.08 7), 8); 19.15 1)–5).

Занятие 11. Вычеты. Вычисление интегралов с помощью вычетов.

12.9 2), 3), 5), 9); 12.11 1), 4), 7), 9).

Дома: 12.9 4), 6), 12), 15); 12.11 2), 5), 6), 10); 12.12.

Дополн.: [7] 797; 799; 804; 805; 808; 824; 836. [16] 21.02; 21.03; 21.10; 21.12; 21.17.

Занятие 12. Вычисление интегралов с помощью вычетов (продолжение).

12.13 2), 5), 10); 12.16 1), 7); 12.18 1), 4), 7); 12.23 1), 2); 12.31* 1), 2).

Дома: 12.13 4), 6), 7); 12.16 2), 3), 5); 12.18 2), 5), 13); 12.23 5); 12.31* 3), 4).

Дополн.: [7] 874; 846; 849; 858 2); 865; 878. [16] 28.03; 28.05; 28.07; 28.09; 28.19.

Занятие 13. Конформные отображения: дробно-линейные и степенные функции.

13.41 1), 3); 13.46 1); 13.50 1); 13.39 1); 13.70; 13.74 1); 13.75 1).

Дома: 13.41 2), 4); 13.46 2); 13.50 2); 13.39 2); 13.69; 13.74 2), 5); 13.75 2).

Дополн.: [7] 160; 164; 180; 214; 244; 255. [16] 33.19; 35.05; 35.13; 35.14.

Занятие 14. Конформные отображения: e^z, функция Жуковского, тригонометрические функции и обратные к ним.

13.79 1)–4); 13.80 1)–3); 13.81; 13.82; 13.84 1); 13.85; 13.88 1); 13.89 1) 13.93 2), 3).

Дома: 13.79 5)–7); 13.80 4), 5); 13.83; 13.84 2); 13.88 2); 13.89 2) 13.93 6), 7).

Дополн.: [7] 262; 264; 303; 304; 307. [16] 35.10; 35.22; 35.29.

Занятие 15. Преобразование Лапласа.

15.6 4), 7); 15.18 1)–5); 15.21; 15.36 3), 4); 15.37 1), 3).

Дома: 15.6 1)–3), 8); 15.18 6)–8); 15.26 1), 3); 15.36 1), 2); 15.37 4), 5).

Занятие 16. Контрольная работа.

Вариант контрольной работы по ТФКП

1. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана по степеням z в кольце D, содержащем точку $\frac{3}{4}$. Указать границы кольца D.

$$f(z) = \frac{1+2z^2}{1+z-z^2}.$$

2. Найти все особые точки функции $f(z)$ и определить их вид:

$$f(z) = \frac{1-\operatorname{ch}(\frac{z}{2})}{e^z - e^{3z}}.$$

3. Применяя теорию вычетов, вычислить интегралы

$$\text{а)} \int\limits_{|z-\frac{1}{2}|=1} \frac{z^3 e^{1/z}}{1-z^2}\,dz; \quad \text{б)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(1-x)\cos 2x}{x^2+6x+10}\,dx.$$

4. Отобразить конформно область $\{|z| > 1, \max(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z) > 0\}$ на верхнюю полуплоскость.

Вопросы к коллоквиуму по комплексному анализу

1. Последовательности и ряды комплексных чисел.
2. Непрерывность функций комплексного переменного.
3. Необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции комплексного переменного в точке.
4. Стереографическая проекция Римана.
5. Аналитичность функции в точке и в области.
6. Определение и свойства криволинейного интеграла от функции комплексного переменного в области.
7. Интегральная теорема Коши.
8. Интегральная формула Коши.
9. Интеграл типа Коши и его свойства.
10. Бесконечная дифференцируемость аналитических функций.
11. Теорема Коши-Адамара.
12. Первая и вторая теоремы Вейерштрасса для функциональных рядов.

13. Гармонические функции и их свойства.

14. Принцип максимума модуля для аналитической функции.

15. Принцип максимума модуля для гармонической функции.

16. Степенные ряды, область сходимости степенного ряда.

17. Теорема Тейлора для аналитических функций.

18. Нули аналитической функции.

19. Теорема Лиувилля.

20. Теорема Морера. Неопределенный интеграл.

21. Теорема единственности аналитической функции.

Задачи для коллоквиума по комплексному анализу

1. а) Найти $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{z}{n})^n$, $n\in\mathbb{N}$, $z=x+iy$.

б) Пусть $z_n\neq 0$, $n\in\mathbb{N}$. Верно ли, что если последовательность $\{z_n\}$ сходится, то и последовательность $\{\arg z_n\}$ сходится.

2. а) Показать, что функции $\sin z$, $\cos z$ непрерывны на $\mathbb{C}$.

б) Найти точки разрыва функции $f(z)=\frac{1}{\sin z-5}$.

3. а) Определить все точки дифференцируемости функции $f(z)=z|z|$.

б) Найти производную функции $f(z)=\mathrm{ch} z$.

4. Найти стереографическую проекцию: а) прямой $x=y$,

б) окружности $x^2+y^2=1$.

5. а) Привести пример непрерывной на $\mathbb{C}$ функции $f(z)$, которая не является аналитичной ни в одной точке $z\in\mathbb{C}$.

б) Найти множество точек, в которых аналитична функция $f(z)=\frac{1}{\cos z}$.

6. а) Вычислить $\int\limits_{|z|=1}|z-1|dz$.

б) Доказать, что если функция $f(z)$ непрерывна в некоторой окрестности точки $z_0\in\mathbb{C}$, то $\lim\limits_{\rho\to0+0}\int\limits_{|z-z_0|=\rho}\frac{f(z)}{z-z_0}dz=2\pi if(z_0)$.

7. а) Пусть функция $f(z)$ аналитична в выпуклой области D и $Ref(z)\geq M>0$. Показать, что для любых точек z_1, $z_2\in D$ и кусочно-гладкой кривой $\gamma\in D$ с началом в точке z_1 и концом в точке z_2. справедливо неравенство

$$\left|\int\limits_{\gamma}f(z)dz\right|\geq M|z_2-z_1|.$$

б) Доказать равенство $\int\limits_{|z|=\rho}z^ndz=\begin{cases}2\pi i,\ n=-1,\\ 0,\ n\in\mathbb{Z}\setminus\{-1\}.\end{cases}$

8. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_{|z|=2}\frac{e^zdz}{z^2-1}$; б) $\int\limits_{|z|=r}\frac{dz}{(z-a)^n(z-b)}$, где $|a|<r<|b|$, $n\in\mathbb{N}$.

9. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_{|\xi|=1}\frac{\xi d\xi}{\xi-z}$ при $|z|\neq1$; б) $\int\limits_{-1}^{1}\frac{\xi d\xi}{\xi-z}$ при $z\notin[-1,1]$.

10. Найти производную функции:

а) $f(z)=\int\limits_{|\xi|=1}\frac{\xi d\xi}{\xi-z}$ при $|z|\neq1$; б) $f(z)=\int\limits_{-1}^{1}\frac{\xi d\xi}{\xi-z}$ при $z\notin[-1,1]$.

11. Найти радиус сходимости степенного ряда и исследовать поведение ряда на границе круга сходимости:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\cos(in)z^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n!}}{n^2}$.

12. а) Привести пример степенного ряда сходящегося неравномерно внутри круга сходимости.

б) Определить область аналитичности суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nz}{2^n}$.

13. а) Является ли гармонической функция $u(x,y)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$ на области $x^2+y^2\neq0$?

б) Доказать, что функция $u(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{(R^2-r^2)d\phi}{R^2+r^2-2Rr\cos(\phi-\theta)}$, $z=z_0+re^{i\theta}$, $0<r<R$ является гармонической в круге $|z-z_0|<R$.

14. а) Пусть $f(z)\in A(D)$ и $|f(z)|$ достигает точную нижнюю грань в точке $z_0\in D$. Следует ли отсюда, что $f(z)$ постоянна в области D?

б) Пусть $f(z)=z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n$. Доказать, что либо хотя бы в одной точке z_0 окружности $|z|=1$ имеет место неравенство $|f(z_0)|>1$, либо $f(z)=z^n$.

15. а) Рассмотрим функцию $f(x,y)=e^x\cos y$ в замыкании единичного круга $x^2+y^2\leq1$. Верно ли, что $\min f(x,y)$ достигается на границе круга?

б) Пусть функция $f(x,y)$ гармонична в области D, непрерывна в $\overline{D}$ и всюду на границе ∂D обращается в нуль. Верно ли, что $f(x,y)=0$ всюду в D?

16. а) Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^nz^n$. б) Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=R$, то и радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ равен R.

17. Разложить в ряд Тейлора с центром в нуле и указать область сходимости:

а) $f(z)=\sin^2 z$, б) $f(z)=e^z\sin z$.

18. а) Существует ли функция $f(z)$, аналитичная в единичном круге, такая что $f(\frac{1}{2n-1}) = 1$, $f(\frac{1}{2n}) = 0$, $n \in \mathbb{N}$?

б) Пусть точка z_0 — нуль порядка n для функции $f(z)$ и нуль порядка m для функции $g(z)$. Чем является точка z_0 для функции $f(z) + g(z)$?

19. а) Положим $M(r) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$. Привести пример функции $f \in A(\mathbb{C})$, для которой $M(r) > r^\alpha$ для любого $\alpha > 0$ и $r > r_0(\alpha)$.

б) Пусть $f(z)$ — многочлен степени n, $M(r)$ — тот же, что и в а). Показать, что для любых r_1, r_2, удовлетворяющих $0 < r_1 < r_2$ справедливо неравенство $M(r_1)r_1^{-n} \geq M(r_2)r_2^{-n}$.

20. а) Пусть D — односвязная область такая, что $0 \notin D$, $1 \in D$. Показать, что

$$\int_1^z \frac{d\xi}{\xi} = \ln|z| + i\arg z.$$

б) Существенно ли в теореме Морера требование односвязности области D?

21. а) Существует ли функция, аналитичная в единичном круге и такая, что $f(\frac{1}{n}) = e^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$?

б) Существенно ли в теореме единственности условие: предельная точка последовательности принадлежит области аналитичности обеих функций.

Вариант зачетной комиссии

1. Разложить функцию $f(x) = x^2$ в тригонометрический ряд Фурье в интервале $(0, 2\pi)$. К чему сходится полученное выражение в точке $x = 2\pi$?

2. Обосновать возможность дифференцирования под знаком интеграла и вычислить интеграл:

$$\int_0^\infty \left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)^2 dx.$$

3. Исследовать на равномерную сходимость на множестве:

$$\int_1^\infty \alpha e^{-\alpha^2 x^2}\, dx, \quad \alpha > 0.$$

4. Разложить в ряд Лорана на указанном множестве

$$f(z) = \frac{2z+1}{z^2+z-2}, \quad 1 < |z| < 2.$$

5. Применить методы ТФКП для вычисления интеграла. Обосновать применимость метода.

$$\int_0^\infty \frac{x\sin\alpha x}{x^2+k^2}\, dx, \quad \alpha, k > 0.$$

6. Отобразить конформно сектор $\{|z| < 2,\ 0 < \arg z < \pi/4\}$ на $\{\operatorname{Im} w > 0\}$.

Вопросы к экзамену

В каждом экзаменационном билете – два вопроса: один по математическому анализу, второй – по теории функций комплексного переменного.

Часть 1. Математический анализ

1. Собственные интегралы, зависящие от параметра (ИЗП).

2. Признаки равномерной сходимости несобственных ИЗП (Вейерштрасса, Дирихле-Абеля, Дини).

3. Непрерывность и интегрируемость несобственных ИЗП на отрезке.

4. Дифференцируемость несобственных ИЗП.

5. Интегрируемость несобственных ИЗП на полупрямой.

6. Вычисление интеграла Дирихле.

7. Свойства Г-функции Эйлера.

8. Свойства В-функции Эйлера. Связь между эйлеровыми интегралами.

9. Асимптотическая формула для функции $\Gamma(\lambda+1)$, $\lambda \to +\infty$. Формула Стирлинга.

10. Ортонормированные системы. Задача о наилучшем приближении элемента евклидова пространства.

11. Замкнутость и полнота ортонормированных систем.

12. Теорема Фейера.

13. Замкнутость тригонометрической системы. Следствия из замкнутости.

14. Теоремы Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывной функции.

15. Локальная теорема Фейера.

16. Простейшие условия равномерной сходимости и почленной дифференцируемости рядов Фурье.

17. Уточнённые условия равномерной сходимости ряда Фурье.

18. Условия сходимости тригонометрического ряда Фурье в точке. Сходимость ряда Фурье кусочно-гельдеровой функции.

19. Свойства преобразования Фурье.

20. Условия разложимости функции в интеграл Фурье.

Часть 2. ТФКП

1. Стереографическая проекция.

2. Функции комплексного переменного. Предел. Непрерывность.

3. Дифференцируемость функций комплексного переменного. Аналитичность.

4. Теорема Коши и её обобщение.

5. Интегральная формула Коши.

6. Принцип максимума модуля аналитической функции.

7. Гармонические функции и их свойства. Принцип максимума.

8. Разложение гармонических функций в ряды. Ряд Фурье для гармонической функции.

9. Бесконечная дифференцируемость аналитических функций. Теорема Лиувилля.

10. Неопределённый интеграл. Теорема Морера.

11. Равномерно сходящиеся ряды аналитических функций.

12. Аналитичность суммы степенного ряда. Теорема Тейлора.

13. Теорема единственности аналитических функций. Нули аналитической функции.

14. Ряды Лорана. Теорема Лорана.

15. Классификация изолированных особых точек. Устранимая особая точка. Полюс.

16. Существенно особая точка. Теорема Сохоцкого-Вейерштрасса.

17. Вычет аналитической функции в изолированной особой точке. Основная теорема о вычетах.

18. Вычисление интегралов с помощью вычетов. Лемма Жордана.

19. Логарифмический вычет. Теорема Руше. Принцип аргумента.

20. Аналитическое продолжение с вещественной оси. Элементарные функции.

21. Аналитическое продолжение с помощью рядов и через границу. Принцип непрерывности.

22. Аналитическое продолжение Гамма-функции Эйлера. Формула дополнения.

23. Основные принципы конформных отображений: принцип соответствия границ и принцип симметрии Римана-Шварца.

24. Свойство аналитической однолистной функции в области.

25. Локальное свойство однолистной функции. Отображение области на область при конформном отображении.

26. Дробно-линейная функция и её свойства.

27. Конформные отображения, осуществляемые элементарными функциями.

28. Задача Дирихле для уравнения Лапласа. Случай круга и верхней полуплоскости.

29. Следствие из решения задачи Дирихле для круга. Теорема Вейерштрасса о приближении непрерывной функции многочленами.

30. Функция Грина (функция источника).

31. Преобразование Лапласа и его основные свойства.

32. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных с помощью преобразования Лапласа.

Задачи к экзамену по математическому анализу, IV семестр

1. Вычислить производную функции $F(y) = \int\limits_{a+y}^{b+y} \frac{\sin(xy)}{x} dx$.

2. Исследовать на равномерную сходимость $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{(x-\alpha)^2+1}$ на множестве M если

а) $M = [a, b]$, б) $M = (-\infty, +\infty)$.

3. Показать, что $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos \alpha x \cos \frac{1}{x}}{1+x^\alpha} dx$ сходится неравномерно на множестве $(0, +\infty)$, однако его значение есть непрерывная функция параметра α.

4. Доказать формулу Фруллани

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\, dx = f(0) \ln \frac{b}{a},$$

где $f \in C[0,+\infty)$, $a, b > 0$, и интеграл $\int\limits_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x}\,dx$ сходится при любом $A > 0$. Вычислить $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x}\,dx$.

5. Показать, что при $\alpha, \beta > 0$ справедливо равенство

$$\int\limits_0^{+\infty} dx \int\limits_\alpha^\beta e^{-tx}\cos mx\,dt = \int\limits_\alpha^\beta dt \int\limits_0^{+\infty} e^{-tx}\cos mx\,dx$$

и вычислить $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\cos mx\,dx$.

6. Исследовать на равномерную сходимость $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin\alpha x}{x}\,dx$ на множестве M если

а) $M = [a,b]$, $0 < a < b$, б) $M = (0,b]$.

7. Используя соотношение $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin\pi x}$, $x \in (0,1)$, показать, что

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{-\frac{1}{2}}.$$

8. Показать, что $F(p) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}\ln x}{1+x}\,dx = \frac{d}{dp}\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx, 0 < p < 1.$

Вычислить $F(p)$.

9. Используя формулу Стирлинга, вывести асимптотическую формулу для произведения $(2n-1)!! = 1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)$ и вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{((2n-1)!!)^{\frac{1}{n}}}$.

10. Проверить, что система

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2l}}, \frac{\cos\frac{\pi x}{l}}{\sqrt{l}}, \frac{\sin\frac{\pi x}{l}}{\sqrt{l}}, \ldots, \frac{\cos\frac{\pi n x}{l}}{\sqrt{l}}, \frac{\sin\frac{\pi n x}{l}}{\sqrt{l}}, \ldots\right\}$$

является ортонормированной в пространстве кусочно непрерывных функций на отрезке $[a, a+2l]$.

11. Будет ли система $\{\cos x, \cos 2x, \ldots, \cos nx, \ldots\}$

а) полной в пространстве кусочно непрерывных функций на отрезке $[0,\pi]$.

б) замкнутой в том же пространстве.

12. Показать, что если периодическая с периодом 2π функция $f \in R[-\pi,\pi]$, то справедливы представления

$$S_n(x,f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt,\ \sigma_n(x,f) = \frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}dt.$$

13. Какой вид принимает равенство Парсеваля для тригонометрической системы в пространстве кусочно-непрерывных функций на отрезке $[-\pi,\pi]$. Может

ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\sin nx$ быть тригонометрическим рядом Фурье некоторой функции из этого пространства?

14. Доказать, что равномерно сходящийся на $[-\pi,\pi]$ тригонометрический ряд $\frac{c_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(c_n\cos nx + d_n\sin nx)$ является тригонометрическим рядом Фурье своей суммы.

15. Показать, что системы а) $\{1, \cos x, \ldots \cos nx, \ldots\}$, б) $\{\sin x, \ldots, \sin nx, \ldots\}$, являются замкнутыми в пространстве кусочно-непрерывных функций на отрезке $[0,\pi]$.

16. Не вычисляя коэффициентов, исследовать на равномерную сходимость тригонометрический ряд Фурье функции $f(x) = \sqrt{|x|+1}$ на отрезке $[-\pi,\pi]$.

17. Исследовать на равномерную сходимость тригонометрический ряд Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} x^{\frac{5}{2}}, 0 \le x \le \pi, \\ 1 + x^{\frac{3}{2}}, -\pi \le x < 0 \end{cases}$$

на отрезках $[-\pi,\pi]$, $[0,\pi]$, $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$.

18. Пусть $f(x) = \sqrt{x}$. Показать, что $f \in C^{\frac{1}{2}}[0,1]$.

19. Найти преобразование Фурье функции $f(x) = e^{-x^2}$.

20. Пусть $a > 0$. Используя разложение функции $e^{-a|x|}$ в интеграл Фурье, вычислить $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos xt}{a^2+t^2}dt$.

Задачи по ТФКП к экзамену

1. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} e^{2\pi i e n!}$.

2. а) Существует ли $f \in A(|z| < 1)$ такая, что для всех $n \geqslant 2$ имеем: $f(1/n) = 1/n$? б) Тот же вопрос для $f(1/n) = (-1)^n/n$.

3. Существует ли $f \in A(\mathbb{C})$ такая, что $|f(z)| \geqslant e^{|z|} - 1$ для всех $z \in \mathbb{C}$?

4. Существует ли $f \in A(\mathbb{C}\setminus\{0\})$ такая, что $|f(z)| \geqslant e^{1/|z|}$?

5. Пусть $a \in \mathbb{C}$, $f(z)$ имеет в точке a устранимую особенность, $g(z)$ – полюс, $h(z)$ – существенную особенность. Какую особенность в точке a могут иметь функции: а) $f^k(z)g^m(z)$, $k,m \in \mathbb{Z}$; б) $g^k(z)h^m(z)$, $k,m \in \mathbb{Z}$; в) $e^{g(z)}$. Привести примеры.

6. Имеет ли функция $\frac{1}{z}$ первообразную в $0 < |z| < 1$? Иными словами, существует ли такая функция $f \in A(0 < |z| < 1)$ такая, что $f'(z) = \frac{1}{z}$ при

$0 < |z| < 1$?

7. Найти радиус сходимости ряда Тейлора функции $\frac{\operatorname{tg}(\frac{1}{z})}{e^{2z}+10}$ с центром в точке $z = i$.

8. Пусть $f \in A(\overline{\mathbb{C}} \setminus \{z_1, \dots, z_n\})$ (одна из точек $z_1, \dots, z_n$ может быть равна ∞), причем каждая из точек $z_1, \dots, z_n$ является полюсом для $f(z)$. Доказать, что $f(z)$ рациональна.

9. Вычислить $\int\limits_{|z|=2} \frac{z^{2001}\,dz}{z^{2002}-1}$.

10. Пусть $f(z)$ – непостоянная целая функция. Доказать, что $M(r) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$ есть строго возрастающая функция от r.

11. Существует ли функция $f(z) \in A(|z| < 2)$ такая, что $f(z) = \overline{z}$ при $|z| = 1$?

12. Привести пример функции $f \in C(K)$, которую нельзя равномерно на K приблизить многочленами от z, если: а) $K = \{|z| \leq 1\}$; б) $K = \{|z| = 1\}$.

13. Найти число нулей (с учетом кратности) следующих функций в круге $|z| < 1$: а) $z^7 + 5z^4 - 2z^2 + 1$; б) $z^2 + 3e^{z-i}$; в) $2z^2 + \cos z$.

14. Отображение $f : D \to \mathbb{C}$ называется *локально конформным*, если каждая точка $z_0 \in D$ имеет окрестность $U(z_0) \subset D$, в которой f конформно. Привести пример отображения $f : D \to \mathbb{C}$, которое локально конформно, но не конформно.

15. Можно ли конформно отобразить область $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ на $\{z : 0 < |z| < 1\}$?

Задачи повышенной трудности

1. Существует ли $f \in A(|z| < 1)$ такая, что для всех $n \geqslant 2$ имеем: $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n!}$.

2. Пусть f, g – целые функции и $f^3(z) + g^3(z) = 1$ для всех $z \in \mathbb{C}$. Доказать, что $f \equiv \mathrm{const}$ и $g \equiv \mathrm{const}$.

3. Доказать, что сумма степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$ не продолжается аналитически ни через одну точку границы его круга сходимости.

4. Доказать лемму Шварца: Пусть $f \in A(|z| < 1)$, $f(0) = 0$ и $|f(z)| \leqslant 1$ при $|z| < 1$. Тогда $|f(z)| \leqslant |z|$ при $|z| < 1$, причем если найдется точка $z_0 \neq 0$ с $|f(z_0)| = |z_0|$, то $f(z) = Cz$ для некоторой константы $C \in \mathbb{C}$. Вывести отсюда (или из неравенств Коши), что в условиях леммы Шварца $|f'(0)| \leqslant 1$, причем если $|f'(0)| = 1$, то $f(z) = Cz$ для некоторой константы $C \in \mathbb{C}$.

5. Пусть $f \in A(|z| < 1)$ и $|f(z)| \leqslant 1$ при $|z| < 1$. Доказать, что $|f'(z)| \leqslant \frac{1-|f(z)|^2}{1-|z|^2}$ при $|z| < 1$.

6. Пусть $\Pi = \{\operatorname{Re} z > 0\}$. Существует ли $f \in A(\Pi)$ такая, что $|f| \leqslant 1$ на Π и $|f'(1)| > 100$?

7. Пусть $D \subset \mathbb{C}$ – ограниченная (не обязательно односвязная) область, а функция $f \in A(D)$ такова, что $f(D) \subset D$ и $f(a) = a$ для некоторой точки $a \in D$. Доказать, что $|f'(a)| \leqslant 1$. Доказать, что если $f'(a) = 1$, то $f(z) \equiv z$.

Литература

1. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ, ч. 2. М.: МГУ. 1987. М.: Проспект. 2004.

2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа, ч. 2. М.: Наука. 1980. М.: Физматлит. 1998, 2004.

3. Демидович Б.П. Сборник задач по математическому анализу. М.: Наука. 1990 и последующие издания.

4. Леонтьева Т.А. Лекции по теории функций комплексного переменного. М.: ф-т ВМК МГУ. 2003.

5. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. М.: Наука. 1981.

6. Бицадзе А.В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного. М.: Наука. 1984.

7. Волковыский Л.И., Лунц Г.И., Араманович И.Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М.: Наука. 1975.

8. Леонтьева Т.А., Панферов В.С., Серов В.С. Задачи по теории функций комплексного переменного. М.: МГУ. 1992.

9. Леонтьева Т.А., Панферов В.С., Серов В.С. Задачи по теории функций комплексного переменного с решениями. М.: Мир. 2005.

Дополнительная литература

10. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа, т. 2. М.: Высшая школа. 1988, М.: Дрофа. 2003.

11. Никольский С.М. Курс математического анализа, т. 2. М.: Наука. 1991.

12. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу, ч. 2. М.: МГУ. 1991, М.: Дрофа. 2001.

13. И. А. Виноградова, С. Н. Олехник, В. А. Садовничий. Математический анализ в задачах и упражнениях (числовые и функциональные ряды). М.: Факториал, 1996.

14. Кудрявцев Л.Д. и др. Сборник задач по математическому анализу, т. 2. М.: Наука. 1986. Т. 3. М.: Физматлит. 1995.

15. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука. 1987, М.: Лань. 2002.

16. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного. М.: Наука. 1989.

17. Сборник задач по теории аналитических функций (под ред. Евграфова М.А.). М.: Наука. 1974.

18. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 2, 3. М.: Физматлит. 2001.

19. Гелбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе. М.: Мир, 1967, М.: URSS. 2007.

20. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций, т. 1, 2. М.: Наука. 1967, 1968.

21. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Наука. 1984, М.: Высшая школа. 1999.